ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

⁂

CONCOURS D'ADMISSION 1981

***

MATHÉMATIQUES

Options M, P' et T.A.

1ère EPREUVE

(Durée 4 heures)

PREAMBULE

Il est vivement conseillé aux candidats de suivre les recommandations suivantes :

- l'étude systématique des applications du type $x \rightsquigarrow \int_a^b f(t,x)\,dt$

ne figure pas au programme ; il est donc conseillé aux candidats de démontrer les propriétés demandées par des raisonnements directs plutôt que d'utiliser des théorèmes en dehors du programme.

- conformément au programme, les candidats peuvent intervertir les deux signes d'intégration dans le calcul d'une intégrale double d'une fonction continue étendue à un pavé $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

- les deux premières parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats établis dans les deux premières.

I - $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \qquad g_n(x) = \int_0^n \frac{t}{1+t^2}\,e^{-xt}\,dt$$

$$h_n(x) = \int_0^n \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$$

1°) Montrer que les fonctions $f_n$, $g_n$ et $h_n$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont continues.

Indication : considérer la fonction $\phi$ :

$$\phi(x) = \int_0^n \frac{t^k\,e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \qquad k = 0,\ 1,\ 2$$

.../...

2°) Montrer :

a - pour $x \geqslant 0$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers une limite $f(x)$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b - pour $x > 0$, les suites $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(h_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en croissant respectivement vers $g(x)$ et $h(x)$.

3°) Montrer qu'il existe une suite de réels $\alpha_n$ positifs tendant vers 0, quand n croît indéfiniment telle que pour tout $x \geqslant 0$ $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \alpha_n$.

En déduire que f est continue pour $x \geqslant 0$.

4°) Pour $x > 0$, établir entre $f(x)$ et $h(x)$ une relation permettant de prouver la continuité de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

5°) Pour $0 < a \leqslant x$, trouver la limite de $I_n(x) = \int_a^x \left(h(\lambda) - h_n(\lambda)\right) d\lambda$ pour $n \longrightarrow \infty$. Calculer $\int_a^x h_n(\lambda)\, d\lambda$ et en déduire que

$$\int_a^x h(\lambda)\, d\lambda = g(a) - g(x)$$

En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6°) Pour $0 < a \leqslant x$, trouver la limite de

$J_n(x) = \int_a^x \left(g(\lambda) - g_n(\lambda)\right) d\lambda$ pour $n \longrightarrow \infty$.

Calculer $\int_a^x g_n(\lambda)\, d\lambda$ et en déduire :

$$\int_a^x g(\lambda)\, d\lambda = f(a) - f(x)$$

7°) Déduire des résultats précédents que f est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Quelles sont sur $\mathbb{R}_+^*$ ses deux premières dérivées ?

Trouver une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants vérifiée par f sur $\mathbb{R}_+^*$.

.../...

II - 1°) Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + n\pi}\, dx$ est convergente

En déduire que les intégrales $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, $\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$, où x est un réel strictement positif, sont convergentes. Préciser la somme de la série $u_n$ : $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

2°) Etudier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale $K(x) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin t}{t(t + x)}\, dt$ et sa limite pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures.

En déduire, que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $L(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t + x}\, dt$ est convergente.

Trouver les limites de L(x) lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et lorsque x croît indéfiniment.

3°) Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + y = \frac{1}{x}$$

la fonction inconnue y sera supposée définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que la solution générale y de (E) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)$$

où $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée à (E) et où u et v sont deux fonctions qui vérifient les relations :

$$\forall\, x > 0 \qquad \begin{cases} u'(x)\, y_1(x) + v'(x)\, y_2(x) = 0 \\ u'(x)\, y_1'(x) + v'(x)\, y_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

En déduire l'expression de la solution générale de (E) à l'aide de L(x).

III - Montrer : $\forall\, x > 0 \quad f(x) = L(x)$ ; en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail